به نام خداوند خورشید و ماه
که دل را به نامش خرد داد راه

مهروماه

لقمه

تیزهوشان

۱۰۰ نکته

ریاضی هشتم

حساب

حامد فرضعلی‌بیک

جلد ۱

فهرست

فصل اوّل: عددهای صحیح و گویا

فصل دوم: عددهای اول

فصل سوم: جبر و معادله

فصل چهارم: بردار و مختصات

فصل پنجم: توان و جذر

فصل ششم: آمار و احتمال

مثال ۲: حاصل کدام عبارت درست است؟

۱) $۸۱ \div ۲۷ \times ۳ = ۱$

۲) $۱۲ - ۱۲[-۹ - (-۱۱)] = ۰$

۳) $۵(-۳)^۲ - ۴(۸ - ۳) = ۲۵$

۴) $۵ - ۵ \times ۵ \div ۵ + ۵ = ۰$

پاسخ گزینهٔ «۳» تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $\underbrace{۸۱ \div ۲۷}_{۳} \times ۳ = ۹$ ×

گزینهٔ ۲: $۱۲ - ۱۲[\underbrace{-۹ + ۱۱}_{۲}] = ۱۲ - \underbrace{۱۲ \times ۲}_{۲۴} = -۱۲$ ×

گزینهٔ ۳: $۵ \times (-۳)^۲ - \underbrace{۴ \times ۵}_{۲۰} = \underbrace{۵ \times ۹}_{۴۵} - ۲۰ = ۲۵$ ✓

گزینهٔ ۴: $۵ - \underbrace{۵ \times ۵}_{۲۵} \div ۵ + ۵ = ۵ - \underbrace{۲۵ \div ۵}_{۵} + ۵ = \cancel{۵} - \cancel{۵} + ۵ = ۵$ ×

۴ تعریف اعمال فرعی در عددهای صحیح

● به کمک اعمال اصلی مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم و نیز توان‌رسانی و ریشه‌گیری، می‌توان با استفاده از نمادهایی چون $*$، $\otimes$ یا ... اعمال و عملیاتی را بین عددهای صحیح تعریف کرد و طبق الگو و تعریف ارائه‌شده در هر سؤال، اقدام به محاسبه کرد.

مثال ۱: اگر $x * y = ۳x^۲ - ۴y$ باشد، حاصل $(-۳) * (-۴)$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$(-۴) * (-۳) = ۳(-۴)^۲ - ۴(-۳)$

$= ۳(۱۶) + ۱۲ = ۴۸ + ۱۲ = ۶۰$

مثال ۲: اگر $a \otimes b = ۲\sqrt{a} + \frac{۱۲}{b}$ باشد، حاصل $(۹ \otimes ۴) \otimes (-۶)$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) -۱ ۳) ۹ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۴»** توجه کنید اولویت با پرانتز است؛ بنابراین:

$۹ \otimes ۴ = ۲\sqrt{۹} + \frac{۱۲}{۴} = ۶ + ۳ = ۹$

$\Rightarrow (\underbrace{۹ \otimes ۴}_{۹}) \otimes (-۶) = ۲\sqrt{۹} + \frac{۱۲}{-۶} = ۶ - ۲ = ۴$

۵ روابط بین عددهای صحیح با فاصلهٔ ثابت (یکسان)

در رابطه با دنباله‌های متناهی از عددهای صحیح که اختلاف هر دو عدد متوالی، عددی ثابت (یکسان) است یا به بیان دیگر، هر عدد از جمع عدد قبلی با عددی ثابت به‌دست می‌آید (مثل $-۴ \xrightarrow{+۳} -۱ \xrightarrow{+۳} ۲ \xrightarrow{+۳} ۵ \xrightarrow{+۳} ۸, \dots, ۸۳$)

می‌توان از فرمول‌های زیر استفاده کرد:

$$\text{تعداد عددها} = \left(\frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{\text{فاصله}}\right) + ۱$$

$$\text{مجموع عددها} = \underbrace{\left(\frac{\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}}{۲}\right)}_{\text{میانگین عدد اول و آخر}} \times \text{تعداد}$$

نکته‌تر: تقسیم‌بندی مجموعه‌های اعداد را مطابق آنچه در زیر آمده است، به خاطر بسپارید:

$\mathbb{R}$ (مجموعهٔ عددهای حقیقی)

$\swarrow \quad \searrow$

(مجموعهٔ عددهای گنگ) $\mathbb{Q}'$ $\qquad$ $\mathbb{Q}$ (مجموعهٔ عددهای گویا)

$\downarrow$

$\mathbb{Z}$

مجموعهٔ عددهای صحیح

{...,−۳,−۲,−۱,۰,۱,۲,۳,...}

$\downarrow$

$\mathbb{I}$ یا $\mathbb{W}$

مجموعهٔ عددهای حسابی

{۰,۱,۲,۳,...}

$\downarrow$

$\mathbb{N}$

مجموعهٔ عددهای طبیعی

{۱,۲,۳,...}

می‌توان نتیجه گرفت هر عدد طبیعی، یک عدد حسابی، یک عدد صحیح، یک عدد گویا و یک عدد حقیقی به حساب می‌آید. به همین ترتیب هر عدد صحیح، یک عدد گویاست، اما هر عدد گویا، عددی صحیح نیست.

۸ اعمال اصلی بین عددهای گویا

- برای جمع و تفریق عددهای گویا، ک.م.م مخرج‌ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم و بعد از تغییر دادن صورت‌ها (متناسب با تغییر مخرج اولیه)، آنها (صورت‌ها) را جمع و تفریق می‌کنیم و حاصل را به عنوان صورت کسری که مخرجش، آن مخرج مشترک به‌دست‌آمده است، می‌نویسیم.
- در ضرب عددهای گویا، ابتدا در صورت امکان، عددهای موجود در صورت کسرها را با عددهای موجود در مخرج کسرها ساده کرده، سپس صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب می‌کنیم.

نکته‌تر: به کسرهایی که صورت و مخرج آنها با هم ساده نشوند، کسر تحویل‌ناپذیر یا ساده‌نشدنی و به کسرهایی که صورت و مخرج آنها با یکدیگر ساده شوند، کسر تحویل‌پذیر یا ساده‌شدنی می‌گویند.

- در تقسیم عددهای گویا نیز، مانند تقسیم عددهای صحیح، عدد گویای اول را در معکوس عدد گویای دوم ضرب می‌کنیم.

نکته‌تر: برای نوشتن معکوس یک کسر کافی است صورت و مخرج آن کسر را با هم جابه‌جا کنیم یا آن کسر را بر ۱ تقسیم کنیم.

صفر تنها عددی است که معکوس ندارد؛ زیرا کسری که مخرج آن صفر باشد، تعریف نشده است.

مثال ۱: حاصل عبارت $(\frac{-۱۴}{۲۷}) \div [\frac{۵}{۶} - \frac{۴}{۹}]$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$(-\frac{۱۴}{۲۷}) \div [\underbrace{\frac{۵\times۳}{۶\times۳} - \frac{۴\times۲}{۹\times۲}}_{\frac{۷}{۱۸}}] = (-\frac{۱۴}{۲۷}) \div (\frac{۷}{۱۸})$$

$$= (-\frac{\overset{۲}{\cancel{۱۴}}}{\underset{۳}{\cancel{۲۷}}}) \times (\frac{\overset{۲}{\cancel{۱۸}}}{\underset{۱}{\cancel{۷}}}) = -\frac{۴}{۳}$$

مثال ۲: حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$[\frac{۱-\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۱}{۳}} \times ۸] \div [\frac{۱+(-\frac{۱}{۳})}{۲-\frac{۲}{۳}} \div (-\frac{۳}{۱۸})]$$

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) -۱

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$[\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۴}{۳}} \times ۸] \div [\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۴}{۳}} \times \frac{-۱۸}{۳}]$$

$$= [\frac{۱}{\underset{۱}{\cancel{۳}}} \times \frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\underset{۱}{\cancel{۴}}} \times \overset{۲}{\cancel{۸}}] \div [\frac{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}} \times \frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\underset{\underset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۴}}} \times \overset{-۳}{\cancel{-۶}}] = ۲ \div (-۳) = -\frac{۲}{۳}$$

تذکر: آنچه در بحث اولویت اعمال ریاضی در محاسبات عددهای صحیح گفته شد، در رابطه با عددهای گویا نیز صدق می‌کند.

مثال ۳: حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{۵}{۲۷}-\frac{۲}{۳}\div\frac{۸}{۹}\times(\frac{۴}{۳})^{۲}+۱۲(\frac{-۱}{۹})^{۲}$$

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $-\frac{۷}{۹}$ ۴) -۱

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$\frac{۵}{۲۷}-(\frac{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}}\times\frac{\overset{۳}{\cancel{۹}}}{\underset{۴}{\cancel{۸}}})\times\frac{۱۶}{۹}+\overset{۴}{\cancel{۱۲}}\times\frac{۱}{\underset{۲۷}{\cancel{۸۱}}}=\frac{۵}{۲۷}-\frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\underset{۱}{\cancel{۴}}}\times\frac{\overset{۴}{\cancel{۱۶}}}{\underset{۳}{\cancel{۹}}}+\frac{۴}{۲۷}$$

$$=\frac{۵}{۲۷}-\frac{۴\times۹}{۳\times۹}+\frac{۴}{۲۷}=-\frac{۲۷}{۲۷}=-۱$$

نکته‌تر: در محاسبات عددهای گویا به عددهای مخلوط توجه کنید:

$$a\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}\qquad -a\frac{b}{c}=-(a+\frac{b}{c})=-a-\frac{b}{c}$$

مثال ۴: حاصل عبارت $۱۳۹۷\frac{۱}{۶}+۱۳۹۶\frac{۱}{۳}-۱۳۹۵\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱۳۹۸ ۲) $۱۳۹۸\frac{۱}{۶}$

۳) $۱۳۹۵\frac{۱}{۶}$ ۴) ۱۳۹۶

شمارنده‌های عددهای طبیعی

۱۹ تعداد شمارنده‌های عددهای طبیعی

عدد طبیعی X پس از تجزیه شدن به عوامل اول به‌صورت مقابل درمی‌آید: $X = A^{\alpha} \times B^{\beta} \times C^{\gamma} \times ...$

(A ، B ، C و... عددهای اول‌اند و هر عدد طبیعی مانند X حداقل یک عامل اول درون خود دارد.)

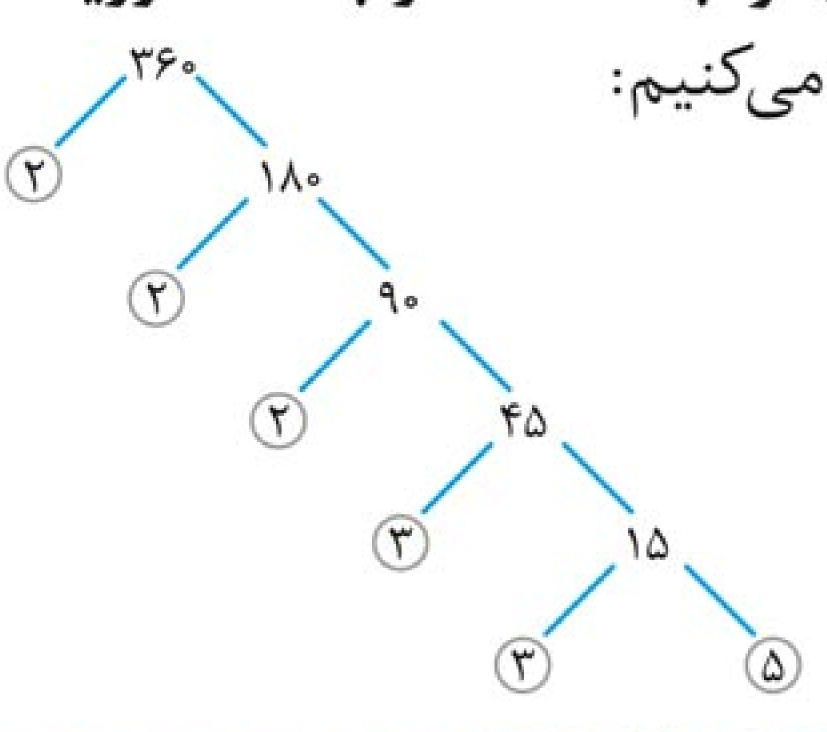
در این‌صورت تعداد شمارنده‌های عدد طبیعی X از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد شمارنده} = (\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱)\times\cdots$$

نکته‌تر: حاصل عبارت بالا را در نظر بگیرید. عدد X به تعداد A ، B ، C و... شمارندهٔ اول دارد. همچنین یک شمارنده (عدد ۱) دارد که نه اول است و نه مرکب؛ بنابراین اگر این تعداد (تعداد شمارنده‌های اول ۱+) را از تعداد کل شمارنده‌ها کم کنیم، تعداد شمارنده‌های مرکب عدد X به‌دست می‌آید.

مثال ۱: تعداد شمارنده‌های مرکب عدد ۳۶۰ را به‌دست آورید.

پاسخ ابتدا عدد ۳۶۰ را تجزیه می‌کنیم:



$$۳۶۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵^۱$$

$$\text{تعداد شمارنده‌های } ۳۶۰ = (۳+۱)(۲+۱)(۱+۱) = ۲۴$$

از این ۲۴ تا شمارنده، ۳ تا اول‌اند (۲، ۳ و ۵) و یکی (عدد ۱) نه اول است و نه مرکب؛ بنابراین تعداد شمارنده‌های مرکب عدد ۳۶۰ برابر است با: $۲۴ - (۳+۱) = ۲۰$

مثال ۲: عدد $۴۲^۳ \times ۷۵^۴$ چند شمارندهٔ غیراول دارد؟

۱) ۱۱۴۹ ۲) ۱۱۴۷ ۳) ۱۱۴۸ ۴) ۱۱۴۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** ابتدا عدد داده‌شده را تجزیه می‌کنیم:

$$(۳\times۲\times۷)^۳ \times (۵^۲ \times ۳)^۴ = ۳^۳ \times ۲^۳ \times ۷^۳ \times ۵^۸ \times ۳^۴$$

$$= ۲^۳ \times ۳^۷ \times ۵^۸ \times ۷^۳$$

$$\text{تعداد شمارنده‌ها} = (۳+۱)(۷+۱)(۸+۱)(۳+۱) = ۱۱۵۲$$

از این تعداد، ۴ تا اول‌اند (۲، ۳، ۵ و ۷) و سایر شمارنده‌ها، یعنی ۱۱۴۸ تا، غیراول‌اند. (غیراول را با مرکب اشتباه نگیرید.)

نکته‌تر: اگر عدد طبیعی A به عددهای اول a، b، c و... بخش‌پذیر باشد، A^n نیز به عددهای اول a، b، c و... بخش‌پذیر است؛ یعنی با به توان رساندن A، تعداد شمارنده‌های اول آن تغییری نمی‌کند.

۲۰ تعداد شمارنده‌های زوج و فرد

برای یافتن تعداد شمارنده‌های زوج و فرد عدد طبیعی X ، پس از تجزیهٔ این عدد، هرعامل اول را از توان صفر تا توان موجود، زیر هم می‌نویسیم تا ستون‌های مختلفی به‌وجود آید. (البته درصورتی که عدد X بیش از یک شمارندهٔ اول داشته باشد.) سپس مثلاً برای یافتن تعداد شمارنده‌های زوج، از ستون عدد ۲ ، همهٔ حالت‌های غیراز $۲^۰$ را انتخاب کرده (چون عدد زوج باید حداقل یک ۲ داشته باشد) و در تعداد کل حالت‌های هرستون ضرب می‌کنیم. این به این دلیل است که در صورت وجود حداقل یک عامل ۲ ، حاصل‌ضرب عوامل، زوج خواهد بود. (اگر تعداد شمارنده‌های زوج را از تعداد کل شمارنده‌ها کم کنیم، تعداد شمارنده‌های فرد به‌دست می‌آید.)

مثال ۱: تعداد شمارنده‌های زوج عدد ۱۱۲ × ۷۷ را به‌دست آورید.

پاسخ تجزیه‌شدهٔ عدد را می‌نویسیم:

$$۷۷ \times ۱۱۲ = ۷ \times ۱۱ \times ۲^۴ \times ۷ = ۱۱ \times ۷^۲ \times ۲^۴$$

$$۳۰ = ۵ \times ۳ \times ۲ = \text{تعداد کل شمارنده‌ها}$$

حال به روشی که گفته شد عمل می‌کنیم:

$2^0 \quad 7^0 \quad 11^0$

$2^1 \quad 7^1 \quad 11^1$

$2^2 \quad 7^2$

2^3

2^4

$2\times3\times4=24$

از ۳۰ شمارندهٔ عدد موردنظر، ۲۴ تا زوج‌اند.

نکته‌تر: برای به‌دست آوردن تعداد شمارنده‌های فرد هر عدد، کافی است عامل‌های زوج را از عدد برداشته و طبق کلید ۱۹ تعداد شمارنده‌های آن را محاسبه کنیم؛ برای مثال تعداد شمارنده‌های فرد عدد 112×77 برابر است با: $77\times112=11\times7^2\times2^4$

$$6=3\times2=(1+2)\times(1+1)=\text{تعداد شمارنده‌های فرد}$$

مثال ۲: ۲۷ برابر عدد 20^a، ۱۲ شمارندهٔ فرد دارد. a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$27\times20^a=3^3\times(2^2\times5)^a=3^3\times2^{2a}\times5^a$$

اگر این سه عامل اول را از توان صفر تا توان موجودشان زیر هم بنویسیم و دور حالت‌های مطلوب را مثل مثال قبل خط بکشیم، همهٔ حالت‌های عدد ۵ و عدد ۳ لحاظ می‌شوند (چون فردند)؛

پاسخ **گزینهٔ «۳»** منظوراز $(5a-2b)^2$ همان $(5a-2b)(5a-2b)$ است؛ بنابراین:

$$(5a-2b)(5a-2b)=25a^2-\underline{10ab}-\underline{10ab}+4b^2$$

$$=25a^2-20ab+4b^2$$

۳۱ گستردهٔ اعداد

یکی ازکاربردهای جبر و عبارت‌های جبری، نمایش گستردهٔ عددهای چندرقمی است. به عنوان مثال، در ریاضی عددهای دورقمی را به‌صورت $\overline{ab}$ نمایش می‌دهند که در آن b یکان و a دهگان است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\overline{ab}=10a+b$$

به همین ترتیب می‌توانیم گستردهٔ عددهای سه‌رقمی، چهاررقمی و... را نیز بنویسیم:

$$\overline{abc}=100a+10b+c$$

$$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$$

مثال ۱: گستردهٔ مقلوب عدد $\overline{x3y}$ را بنویسید.

پاسخ می‌دانیم مقلوب عدد دورقمی $\overline{ab}$ ، $\overline{ba}$ و مقلوب عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ ، $\overline{cba}$ است؛ بنابراین:

$$\overline{x3y}\xrightarrow{\text{مقلوب}}\overline{y3x}\Rightarrow\overline{y3x}=100y+30+x$$

مثال ۲: اختلاف هر عدد دورقمی و مقلوبش همواره بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۱

پاسخ **گزینهٔ «۲»** فرض می‌کنیم $a > b$ ؛ در نتیجه:

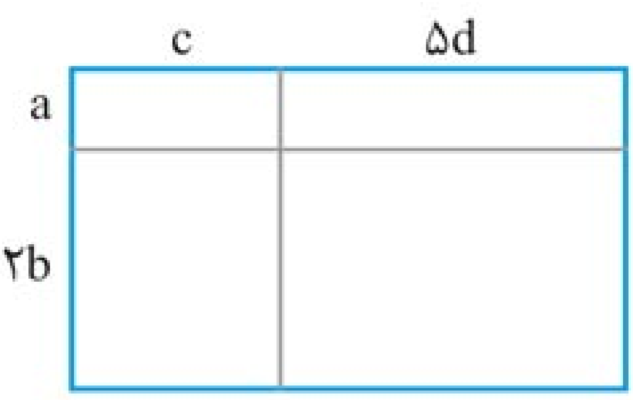
$$\overline{ab}-\overline{ba}=(10a+b)-(10b+a)$$

$$=10a+b-10b-a=9a-9b=\underbrace{9(a-b)}_{\text{مضرب ۹}}$$

۳۲ جبر در هندسه

- عبارت‌های جبری در هندسه (به‌ویژه برای نمایش مساحت و حجم شکل‌های هندسی) نیز کاربرد دارند. به مثال‌های زیر دقت کنید؛

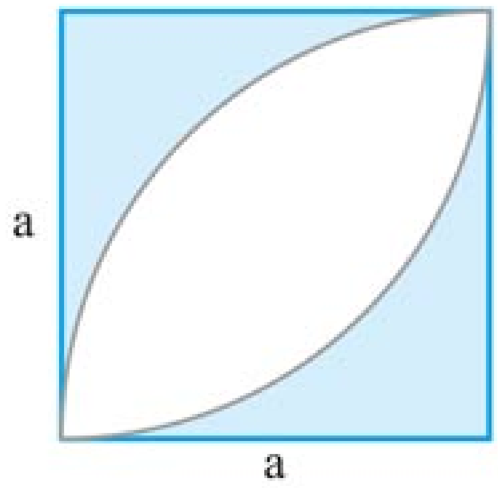
مثال ۱: مساحت بزرگ‌ترین مستطیل در شکل زیر را به‌صورت یک عبارت جبری بنویسید.



پاسخ عرض بزرگ‌ترین مستطیل این شکل، $(a+2b)$ و طول آن $(c+5d)$ است؛ بنابراین:

$$S_{\text{مستطیل}}=(a+2b)(c+5d)=ac+5ad+2bc+10bd$$

مثال ۲: مساحت قسمت رنگی شکل زیر کدام است؟



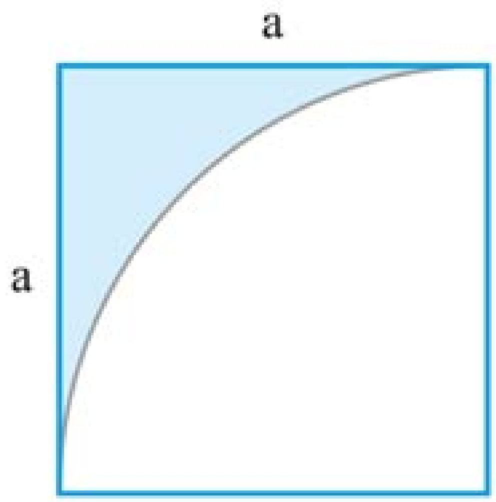
۱) $(۲-\frac{\pi}{۲})a^۲$

۲) $(۱-\frac{\pi}{۲})a^۲$

۳) $(۲+\frac{\pi}{۲})a^۲$

۴) $(۱+\frac{\pi}{۲})a^۲$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** مساحت یکی از قسمت‌های رنگی برابراست با:



$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{ربع دایره}}$$

$$= a^۲ - \frac{\pi a^۲}{۴}$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی شکل مسئله برابر است با:

$$۲\times(a^۲-\frac{\pi}{۴}a^۲) = ۲(۱-\frac{\pi}{۴})a^۲ = (۲-\frac{\pi}{۲})a^۲$$

۳۳ مفهوم اتحاد جبری

به هر تساوی شامل عبارت‌های جبری که به ازای جمیع مقادیر متغیر (یا متغیرهای آن) برقرار باشد، اتحاد جبری گفته می‌شود؛ برای مثال $x+x+x=۳x$ یک اتحاد جبری به حساب می‌آید.

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ نیز مثال دیگری از اتحاد جبری است، چون:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - \underline{ab} - \underline{ab} + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

ثابت کردیم سمت چپ و راست تساوی **همواره** با هم برابرند، پس این تساوی یک اتحاد جبری به حساب می‌آید.

مثال ۱: نشان دهید $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ یک اتحاد جبری است.

پاسخ باید ثابت کنیم سمت چپ تساوی همواره با سمت راست آن برابر است:

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = (x^2 + \underline{xy} + \underline{xy} + y^2)(x+y)$$

$$= (x^2 + 2xy + y^2)(x+y)$$

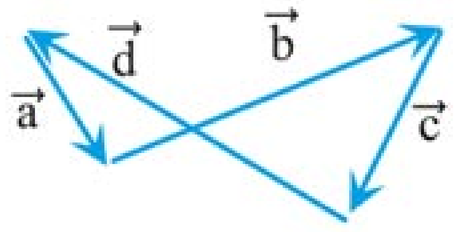
$$= x^3 + \underline{x^2y} + \underline{2x^2y} + \underline{\underline{2xy^2}} + \underline{\underline{xy^2}} + y^3$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

مثال ۲: اگر $(x-3)(x+4) = ax^2 + bx + c$ یک اتحاد جبری باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 3 ۳) -5 ۴) 2

مثال ۳: در شکل زیر $\vec{a}=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$، $\vec{c}=\begin{bmatrix}-۲\\-۴\end{bmatrix}$ و $\vec{d}=\begin{bmatrix}-۵\\۶\end{bmatrix}$ است. مختصات بردار b کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۵\\۲\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۱» با توجه به شکل می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=۰$$

چون اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ را از ابتدای a به انتهای c رسم کنیم، قرینهٔ بردار d است، یعنی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{d}$ ؛ بنابراین:

$$\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}+\vec{b}+\begin{bmatrix}-۲\\-۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۵\\۶\end{bmatrix}=۰$$

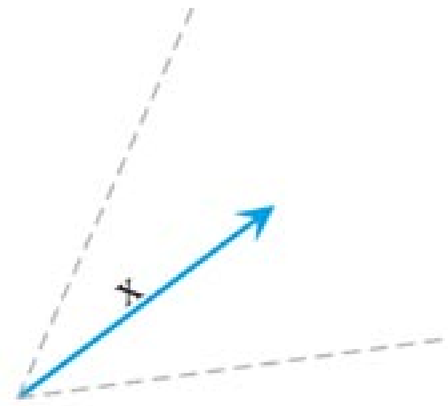
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-۵\\-۱\end{bmatrix}+\vec{b}=۰\Rightarrow\vec{b}=\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}$$

۵۸ تجزیهٔ بردارها

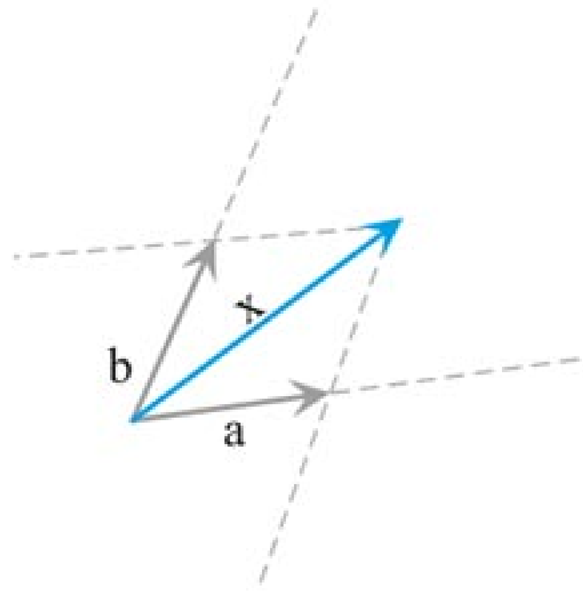
- تجزیهٔ یک بردار به دو بردار، عملی برعکس جمع دو بردار است. در واقع منظور از تجزیهٔ بردار c به بردارهای a و b، رسم این دو بردار به‌گونه‌ای است که داشته باشیم: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$
- برای تجزیهٔ برداری مانند c به دو بردار a و b، باید راستای این دو بردار در شکل مشخص باشد و ابتدای بردار c نیز روی

محل تقاطع این دو راستا قرار گیرد. در این صورت از انتهای بردار c دو خط به موازات راستاهای موجود رسم می‌کنیم تا راستاها را در دو نقطه قطع کنند. بردارهایی که ابتدای بردار c را به این دو نقطه وصل می‌کنند، a و b هستند.

مثال ۱: در شکل زیر، بردار x را در راستاهای داده‌شده تجزیه کنید.



پاسخ به روشی که گفتیم، عمل می‌کنیم:



می‌توانیم بنویسیم: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$

مثال ۲: بردار $\vec{p} = \begin{bmatrix} ۳x - ۱ \\ y + ۲ \end{bmatrix}$ پس از تجزیه شدن، به‌صورت $\vec{p} = ۲\vec{m} + ۳\vec{n}$ درآمده است. اگر $\vec{m} = \begin{bmatrix} ۳ + y \\ x - ۲ \end{bmatrix}$ و $\vec{n} = \begin{bmatrix} ۲y - ۳ \\ x - ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع x و y کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱− ۴) صفر

مثال ۳: حاصل عبارت $(۲^{۳})^{۲} - ۲^{۳^{۲}} + (۲^{۳})^{۴^{۰}}$ را به‌دست آورید.

پاسخ $۲^{۶} - ۲^{۹} + (۲^{۳})^{۱} = ۲^{۶} - ۲^{۹} + ۲^{۳} = ۶۴ - ۵۱۲ + ۸ = -۴۴۰$

مثال ۴: کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

۱) $۹^{۱۲}$ ۲) $۳^{۱۸}$ ۳) $۲۷^{۸}$ ۴) $۸۱^{۶}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $۹^{۱۲} = (۳^{۲})^{۱۲} = ۳^{۲۴}$

گزینهٔ ۳ : $۲۷^{۸} = (۳^{۳})^{۸} = ۳^{۲۴}$

گزینهٔ ۴: $۸۱^{۶} = (۳^{۴})^{۶} = ۳^{۲۴}$

۶۶ ضرب عددهای توان‌دار

● در ضرب عددهای توان‌دار، لازم است یا پایه‌ها برابر باشند، یا توان‌ها؛ در این صورت:

اگر پایه‌ها برابر باشند، یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$$

اگر توان‌ها برابر باشند، یکی از توان‌ها را می‌نویسیم و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$a^{m} \times b^{m} = (ab)^{m}$$

مثال ۱: حاصل عبارت $۶^{۴} \times ۹^{۶} \times ۳^{۴} \times ۲^{۶}$ را به‌صورت یک عدد توان‌دار نشان دهید.

پاسخ

$$۲^۶ \times ۳^۴ \times ۹^۶ \times ۶^۴ \xrightarrow[\text{برابر}]{\text{توان‌های}} ۱۸^۶ \times ۱۸^۴ \xrightarrow{\text{پایه‌های برابر}} ۱۸^{۱۰}$$

نکته‌تر: در ضرب عددهای توان‌دار اگر پایه‌ها و توان‌ها برابر نباشند، سعی می‌کنیم با تجزیهٔ پایه‌ها به عوامل اول و استفاده از قانون ضرب توان‌ها، پایه‌های برابر بسازیم. اگر این کار امکان‌پذیر نبود، از ب.م.م توان‌ها کمک می‌گیریم و با عملیاتی برعکس عملیات ضرب توان‌ها، توان‌های مساوی به‌وجود می‌آوریم.

مثال ۲: حاصل عبارت $۱۲۸^۳ \times ۴^۵ \times ۸^۶ \times ۳۲^۲$ را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید.

پاسخ همهٔ پایه‌ها از خانوادهٔ عدد ۲ هستند؛ بنابراین:

$$(۲^۵)^۲ \times (۲^۳)^۶ \times (۲^۲)^۵ \times (۲^۷)^۳ = ۲^{۱۰} \times ۲^{۱۸} \times ۲^{۱۰} \times ۲^{۲۱}$$

$$= ۲^{(۱۰+۱۸+۱۰+۲۱)} = ۲^{۵۹}$$

مثال ۳: حاصل عبارت $۲^{۸۷} \times ۳^{۵۸}$ کدام است؟

۱) $۳۶^{۲۹}$ ۲) $۷۲^{۲۹}$

۳) $۳۶^{۳۱}$ ۴) $۷۲^{۳۱}$

پاسخ گزینهٔ «۲» پایه‌ها را نمی‌توانیم برابر کنیم. می‌دانیم $(۸۷ , ۵۸) = ۲۹$؛ بنابراین:

$$۲^{۲۹\times۳} \times ۳^{۲۹\times۲} = (۲^۳)^{۲۹} \times (۳^۲)^{۲۹} = ۸^{۲۹} \times ۹^{۲۹} = ۷۲^{۲۹}$$

۶۷ تقسیم عددهای توان‌دار

در تقسیم عددهای توان‌دار نیز مانند ضرب، لازم است پایه‌های برابر یا توان‌های برابر وجود داشته باشد؛

در این صورت:

اگر پایه‌ها برابر باشند، یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را از هم کم می‌کنیم: $a^m \div a^n = a^{m-n}$

اگر توان‌ها برابر باشند، یکی از توان‌ها را می‌نویسیم و پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم: $a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$

مثال ۱: حاصل عبارت $(۷۲^۹ \div ۳^۹) \div ۲۴^۵$ را به‌دست آورید.

پاسخ
$$(۷۲^۹ \div ۳^۹) \div ۲۴^۵ = (\frac{۷۲}{۳})^۹ \div ۲۴^۵ = ۲۴^۹ \div ۲۴^۵ = ۲۴^۴$$

مثال ۲: حاصل عبارت $(\frac{۱۵۳}{۲۰۷})^۵ \div (\frac{۶۸}{۱۸۴})^۵$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۲ ۳) ۲۵ ۴) ۴۹

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$(\frac{۱۵۳}{۲۰۷})^۵ \div (\frac{۶۸}{۱۸۴})^۵ = (\frac{۱۵۳}{۲۰۷} \div \frac{۶۸}{۱۸۴})^۵$$

$$= (\frac{\overset{۱}{\cancel{۹}}\ \cancel{۱۵۳}}{\cancel{۲۰۷}\ \underset{۱}{\cancel{۹}}} \times \frac{\overset{۲}{\cancel{۸}}\ \cancel{۱۸۴}}{\cancel{۶۸}\ \underset{۱}{\cancel{۴}}})^۵ = ۲^۵ = ۳۲$$

۶۸ حالت‌های خاص جمع عددهای توان‌دار

اگر چند عدد توان‌دار یکسان با هم جمع شوند و تعداد آنها توانی از پایه باشد، از خاصیت $\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{ بار}}=na$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: حاصل عبارت $۵^۷+۵^۷+۵^۷+۵^۷+۵^۷$ را به‌صورت یک عدد توان‌دار نمایش دهید.

پاسخ $۵^۷+۵^۷+۵^۷+۵^۷+۵^۷=۵\times۵^۷=۵^۸$

مثال ۲: حاصل عبارت $\underbrace{۲۷^۳+۲۷^۳+\cdots+۲۷^۳}_{۸۱\text{ بار}}$ را به‌صورت ۳^a نوشته‌ایم. a کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ گزینهٔ «۴»

$$۸۱\times۲۷^۳=۳^۴\times(۳^۳)^۳=۳^۴\times۳^۹=۳^{۱۳}\Rightarrow a=۱۳$$

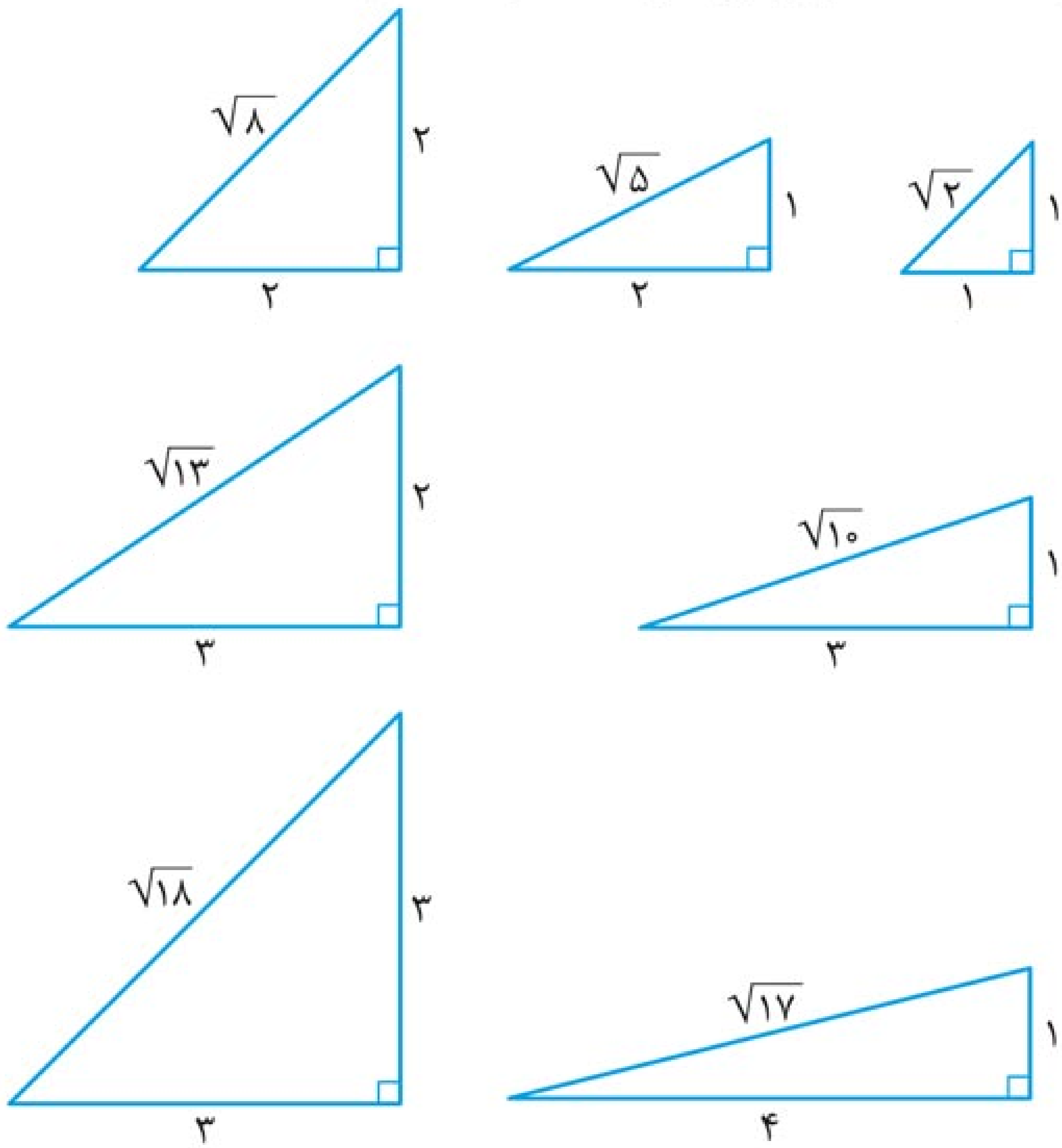
۶۹ پایهٔ منفی

اگر پایهٔ عددی توان‌دار، منفی و توان آن زوج باشد، می‌توان آن را به‌صورت یک پایهٔ مثبت نوشت (توان زوج، منفی‌خور است)؛ برای مثال: $(-۱۷)^۸=۱۷^۸$

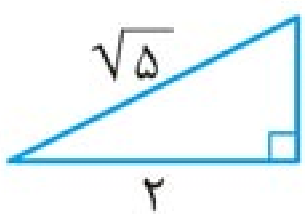
اما اگر پایه، منفی و توان آن فرد باشد، علامت منفی برای پایه باقی می‌ماند؛ مانند: $(-۱۷)^۷=-۱۷^۷$

به بیان دیگر، $-۱۷^۸$ با $(-۱۷)^۸$ تفاوت دارد، در حالی‌که $-۱۷^۷$ و $(-۱۷)^۷$ با هم تفاوتی ندارند.

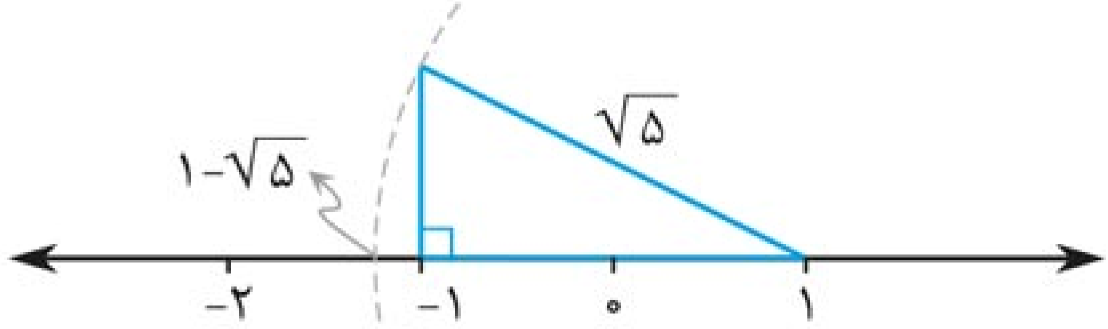
مهم‌ترین و پرکاربردترین عددهای رادیکالی که در این مبحث مورد استفاده قرار می‌گیرند، عبارت‌اند از:



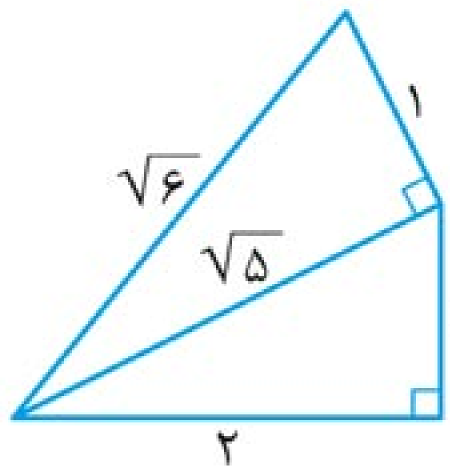
مثال ۱: عدد $\sqrt{۵}-۱$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

پاسخ $\sqrt{۵}$ را در مثلث 

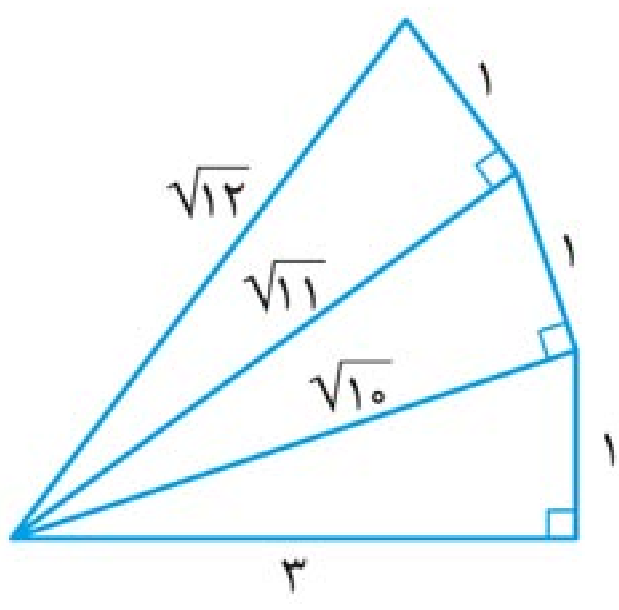
داریم، بنابراین:



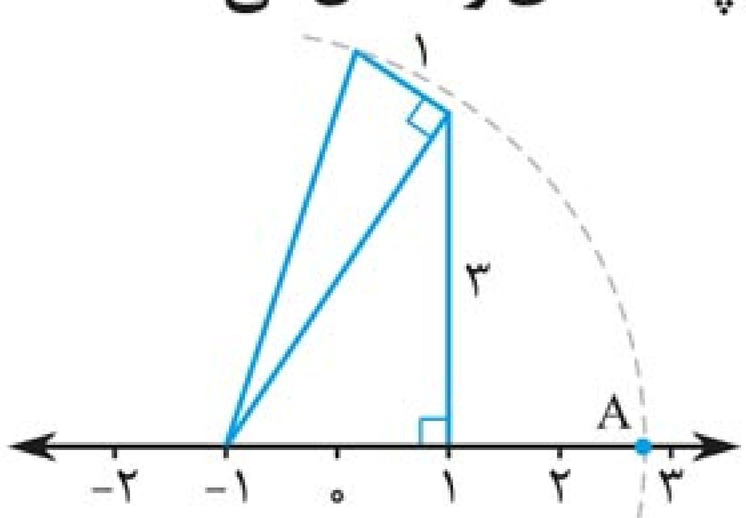
گاهی اوقات برای نشان دادن عددهای رادیکالی روی محور، لازم است از بیش از یک مثلث قائم‌الزاویه کمک بگیریم. مثلاً برای نمایش عدد $\sqrt{۶}$ روی محور (یا به بیان دیگر، برای به‌دست آوردن وتری به اندازهٔ $\sqrt{۶}$) از شکل زیر کمک می‌گیریم:



یا وتری به اندازهٔ $\sqrt{۱۲}$ را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:



مثال ۲: نقطهٔ A در شکل زیر چه عددی را نشان می‌دهد؟



۱) $\sqrt{۱۴}-۱$

۲) $۱+\sqrt{۱۴}$

۳) $۱+\sqrt{۱۳}$

۴) $۱+\sqrt{۱۱}$

۹۲ میانگین

● میانگین چند عدد یعنی مجموع آنها تقسیم بر تعدادشان. به بیان دیگر اگر $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ داده‌های آماری باشند، میانگین آنها که با $\overline{x}$ نمایش داده می‌شود، برابر است با:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

مثال ۱: میانگین عددهای طبیعی زوج کوچک‌تر از ۲۰ را بیابید.

پاسخ

$$\overline{x} = \frac{۲+۴+۶+۸+۱۰+۱۲+۱۴+۱۶+۱۸}{۹} = \frac{۹۰}{۹} = ۱۰$$

نکته‌تر: **تعداد اعداد × میانگین اعداد = مجموع اعداد**

مثال ۲: میانگین ۶ عدد برابر ۱۲ است. اگر میانگین دوتای آنها ۱۰ باشد، میانگین سایر عددها کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ گزینۀ «۴»

$$\begin{cases} \text{مجموع ۶ عدد} = ۱۲ \times ۶ = ۷۲ \\ \text{مجموع ۲ عدد از ۶ عدد} = ۲ \times ۱۰ = ۲۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ۴ عدد دیگر} = ۷۲ - ۲۰ = ۵۲$$

$$\Rightarrow \text{میانگین ۴ عدد دیگر} = \frac{۵۲}{۴} = ۱۳$$

نکته‌تر: اگر هر یک از داده‌ها را در عدد k ضرب یا بر عدد k تقسیم کنیم، میانگین آنها نیز در k ضرب یا بر k تقسیم می‌شود؛ همچنین اگر به هر داده a واحد اضافه کنیم یا a واحد از آن کم کنیم، به میانگین آنها نیز a واحد اضافه یا a واحد از آن کم می‌شود.

هرگاه عددی بزرگ‌تر از میانگین چند عدد را به آنها اضافه کنیم، حتماً میانگین جدید بزرگ‌تر می‌شود؛ اگر عددی کوچک‌تر از میانگین را به عددها اضافه کنیم، میانگین جدید حتماً کوچک‌تر می‌شود و اگر عددی برابر با میانگین را به عددها اضافه کنیم، میانگین جدید تغییری نمی‌کند.

۹۳ میانگین داده‌های طبقه‌بندی شده (داده‌های جدولی)

- میانگین داده‌های جدولی (طبقه‌بندی شده) از تقسیم مجموع اعداد دو ستون از جدول فراوانی به‌دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع (فراوانی} \times \text{مرکز دسته)}}{\text{مجموع فراوانی}}$$

مثال ۱: در جدول زیر، میانگین داده‌های آماری را تا یک رقم اعشار به‌دست آورید.

خط نشان	حدود دسته
///	۰ − ۴
//// ///	۴ − ۸
//// //	۸ − ۱۲
///	۱۲ − ۱۶

۱۰۰ احتمال هندسی

- در برخی مسائل احتمال، فضای نمونه‌ای و پیشامد موردنظر، پارامترهای هندسی مانند طول، مساحت یا حجم هستند.
- در رابطه با مساحت (که سهم بیشتری در مسائل این بخش دارد) فرمول احتمال به‌صورت زیر خواهد بود:

$$P(A)=\frac{\text{مساحت ناحیهٔ مطلوب}}{\text{مساحت کل شکل}}$$

(به طریق مشابه می‌توان برای طول و حجم نیز فرمول ارائه کرد.)

مثال ۱: در شکل مقابل، شعاع دایرهٔ بزرگ، ۳ برابر شعاع دایرهٔ کوچک است. اگر تیری به سمت این صفحه شلیک کنیم، چقدر احتمال دارد به ناحیهٔ رنگی برخورد کند؟

پاسخ شعاع دایرهٔ کوچک را x در نظر می‌گیریم؛ بنابراین مساحت دایرهٔ بزرگ برابر است با: $n(S)=\pi(۳x)^۲=۹\pi x^۲$

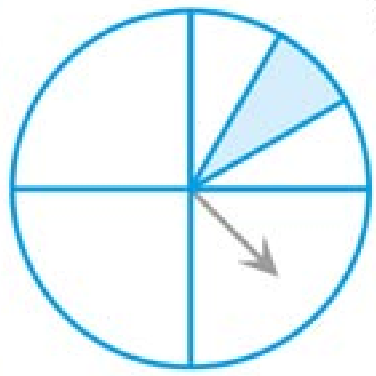
مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با:

$$\underbrace{۹\pi x^۲}_{\text{مساحت دایرهٔ بزرگ}}-\overbrace{\pi x^۲}^{\text{مساحت دایرهٔ کوچک}}=۸\pi x^۲$$

پس:

$$P(A)=\frac{۸\cancel{\pi}\,\cancel{x^۲}}{۹\cancel{\pi}\,\cancel{x^۲}}=\frac{۸}{۹}$$

مثال ۲: اگر چرخندهٔ مقابل را ۳۲۴ بار بچرخانیم، احتمالاً چند بار عقربه روی قسمت رنگی می‌ایستد؟



۱) ۳۰ ۲) ۲۷

۳) ۲۴ ۴) ۳۶

پاسخ گزینهٔ «۲» احتمال ایستادن عقربهٔ چرخنده روی ناحیهٔ رنگی $\frac{۱}{۱۲}$ است؛ پس اگر ۳۲۴ بار آن را بچرخانیم، احتمالاً عقربه به تعداد $۲۷ = ۳۲۴ \times \frac{۱}{۱۲}$ بار روی قسمت رنگی می‌ایستد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۵۲. یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید، تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید، سکه را دو بار متوالی پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال سکه فقط یک بار پشت می‌آید؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۱۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۵۳. سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عددهای یکسان ظاهر شوند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۳۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۱۵۴. با کدام احتمال در پرتاب دو تاس، مجموع عددهای ظاهرشده، اول خواهد بود؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$